Dadansoddi ymatebion stocastig gan ddefnyddio dull ffwythiannau-eigen ar hap

Sion Eilir Pryse a Sondipon Adhikari

Coleg Peirianneg, Prifysgol Abertawe

656060@swansea.ac.uk

Prosiect: NRN125

Sefydlwyd dull newydd ar gyfer darganfod ymateb dadansoddiad dull elfennau meidraidd ar hap o hafaliadau differol eliptig rhannol. Gwnaed hyn drwy ysgrifennu'r ymateb fel swm o luosymiau sgalarau a fectorau ar hap, ble y gellir canfod y sgalarau a'r fectorau drwy ddadelfeniad-eigen o fatrics anhyblygedd system. Lleihawyd amser cyfrifo'r dull drwy frasamcanu'r gwerthoedd-eigen a'r fectorau-eigen ar hap, a thrwy flaendorri'r swm. Mae techneg newydd i leihau'r cyfeiliornad wedi ei gymhwyso drwy ddefnyddio'r dechneg Galerkin. Cymhwyswyd y dull i ddadansoddi ymateb trawst cantilifer wrth i rym statig benderfynedig weithredu arno. Mae canlyniadau'r dull arfaethedig yn cael ei gymharu â'r canlyniadau a geir drwy ddefnyddio Efelychiadau Monte Carlo uniongyrchol a chaos polynomial.

Hafaliad differol eliptig stocastig rhannol

Caiff ansicrwydd mewn paramedrau effaith sylweddol ar ddadansoddiadau. Cyfyd yr ansicrwydd oherwydd priodweddau deunydd system, geometreg neu amodau ffin y strwythur, neu oherwydd grym allanol sy'n gweithredu ar y system. Er mwyn portreadu'r ansicrwydd, gellir cynrychioli'r system fel system arwahanol drwy ddefnyddio'r dull elfennau meidraidd ar hap [DEMAH]. Cymhwyswyd y dull hwn i nifer o broblemau statig a deinamig mewn amryw o feysydd megis mecaneg strwythurol a mecaneg hylif. Yn y gwaith hwn, ystyrir systemau statig sy'n gallu cael eu disgrifio gan hafaliad differol eliptig stocastig rhannol

$$-\nabla[a(x,\omega)\nabla u(x,\omega)] = p(x) \qquad x \text{ yn } \mathcal{D} \tag{1}$$

Yn Hafaliad (1), dynoda $a : \mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}(d \leq 3)$ faes ar hap, a tybiwn ei fod yn sefydlog ac yn integradwy sgwâr. Mae $\omega \in \Omega$ yn bwynt sampl o'r gofod samplu Ω. Gellir ehangu'r broses ar hap $a(x,\omega)$ gan ehangiad Fourier cyffredinol sy'n cael ei adnabod fel yr ehangiad Karhunen-Loève

$$a(x,\omega) = a_0(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\widetilde{\xi}_i(\omega)\boldsymbol{\phi}_i(x) \tag{2}$$

ble a_0 yw'r ffwythiant cymedrig, $\widetilde{\xi}_i(\omega)$ yw'r hapnewidynnau Gaussian anghydberthnasol, a chynrychiola λ_i a $\boldsymbol{\phi}_i(x)$ y gwerthoedd-eigen a'r fectorau-eigen sy'n bodloni'r ffwythiant hunangydberthynas. Wedi blaendorri'r gyfres yn Hafaliad (2) i'r Mfed term, gellir amnewid yr hafaliad yn yr hafaliad differol eliptig stocastig rhannol gwreiddiol. Drwy gymhwyso'r amodau ffin priodol, mae'r hafaliad arwahanol yn cymryd y ffurf

$$\underbrace{\left[\mathbf{A}_0 + \sum_{i=1}^{M} \xi_i(\omega)\mathbf{A}_i\right]}_{A(\omega)} \mathbf{u}(\omega) = \mathbf{f} \tag{3}$$

ble cynrychiola $\mathbf{A}_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ fatrics penderfynedig, pendant bositif, a chymesur. Cynrychiola $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ fatricsau ar hap cymesur ar gyfer $i = 1,2,...M$, a cynrychiola $\mathbf{u}(\omega) \in \mathbb{R}^n$ y fector ymateb a $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ y fector grym penderfynedig. Ein nod yw darganfod dull datrys newydd ar gyfer yr hafaliad hwn.

Caos Polynomial

Wedi blaendoriad meidraidd, gellir mynegi ehangiad caos polynomial o ymateb Hafaliad (3) fel swm o luosymau sgalarau ar hap a fectorau penderfynedig.

$$\mathbf{u}(\omega) = \sum_{k=1}^{P} H_k(\xi(\omega))\mathbf{u}_k \quad \text{ble} \quad P = \sum_{j=0}^{p} \frac{(M+j-1)!}{j!(M-1)!} \tag{4}$$

ble cynrychiola $H_k(\xi(\omega))$ y caosau polynomial sgalar ar hap a $\mathbf{u}_k$ y fectorau penderfynedig. Pennir gwerth P gan yr hapnewidyn sylfaenol M ac gan drefn yr ehangiad caos polynomial (p). Yn yr achos hwn, cyfateba gwerth M â threfn yr ehangiad Karhunen-Loève. Daw i'r amlwg o'r hafaliad uchod y bod gwerth P yn cynyddu'n gyflym os cynyddir gwerth M neu p.

Y dull ffwythiannau-eigen ar hap

Bwriad y gwaith hwn yw canfod mynegiant ar gyfer ymateb Hafaliad (3) ble y gellir ei ysgrifennu fel swm o luosymiau sgalarau a fectorau ar hap.

Yn y lle cyntaf, ystyrir y broblem gwerth-eigen ar hap.

$$\mathbf{A}(\omega)\boldsymbol{\phi}_k(\omega) = \lambda_k(\omega)\boldsymbol{\phi}_k(\omega); \quad k = 1,2,\ldots n \tag{5}$$

Er cyfleustra, gellir diffinio'r matricsau sy'n cynnwys gwerthoedd-eigen a fectorau-eigen $\mathbf{A}(\omega)$ fel a ganlyn

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Lambda}(\omega) &= \operatorname{diag}\left[\lambda_1(\omega),\lambda_2(\omega),\ldots,\lambda_n(\omega)\right] \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{ac} \\ \boldsymbol{\Phi}(\omega) &= \left[\boldsymbol{\phi}_1(\omega),\boldsymbol{\phi}_2(\omega),\ldots,\boldsymbol{\phi}_n(\omega)\right] \in \mathbb{R}^{n\times n}\end{aligned} \tag{6}$$

Mae'r gwerthoedd-eigen ar hap wedi eu trefnu o'r gwerth lleiaf hyd y mwyaf ($\lambda_1(\omega) < \lambda_2(\omega) < \ldots < \lambda_n(\omega)$) a threfnwyd y fectorau-eigen ar hap cyfatebol yn yr un drefn.

O ganlyniad i briodwedd orthogonal $\boldsymbol{\Phi}(\omega)$, daw i'r amlwg fod $\boldsymbol{\Phi}(\omega)^{-1} = \boldsymbol{\Phi}(\omega)^T$. Trwy hyn, gellir pennu'r diffiniadau canlynol (er cyfleustra, hepgorwyd ω o'r nodiant)

$$\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Lambda}; \quad \mathbf{A} = \boldsymbol{\Phi}^{-T}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Phi}^{-1} \quad \text{ac} \quad \mathbf{A}^{-1} = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T \tag{7}$$

Trwy ddefnyddio'r mynegiannau hyn, gellir diffinio ymateb Hafaliad (3) fel

$$\mathbf{u}(\omega) = \mathbf{A}(\omega)^{-1}\mathbf{f} \tag{8}$$

$$\mathbf{u}(\omega) = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Phi}^T\mathbf{f} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{\boldsymbol{\phi}_j^T(\omega)\mathbf{f}}{\lambda_j(\omega)}}_{a_j(\omega)} \underbrace{\boldsymbol{\phi}_j(\omega)}_{\mathbf{g}_j(\omega)} \tag{9}$$

ble cynrychiola $\frac{\boldsymbol{\phi}_j^T(\omega)\mathbf{f}}{\lambda_j(\omega)}$ y sgalarau ar hap, a $\boldsymbol{\phi}_j(\omega)$ y fectorau ar hap. Fodd bynnag, nid yw cyfrifo union werthoedd y sgalarau ar hap ($a_j(\omega)$) a'r fectorau ar hap ($\mathbf{g}_j(\omega)$) yn broses gyflym. Mae hyn wedi ysgogi dulliau i leihau'r amser y mae'n cymryd i gyfrifo gwerth yr ymateb. Gellir gwneud hyn mewn dwy ffordd:

Blaendorri: Gellir blaendorri'r gyfres a welir yn Hafaliad (9) wedi nifer penodol o dermau (t). O ganlyniad i drefn esgynnol y gwerthoedd-eigen, mae gan dermau olaf y gyfres werthoedd isel. Golyga hyn y gellir anwybyddu'r termau sydd â gwerthoedd isel tra bo'r termau trechol yn cael eu cadw'n y gyfres. Felly gellir mynegi Hafaliad (9) fel a ganlyn

$$\mathbf{u}(\omega) \approx \sum_{j=1}^{t} \frac{\boldsymbol{\phi}_j^T(\omega)\mathbf{f}}{\lambda_j(\omega)}\boldsymbol{\phi}_j(\omega) \tag{10}$$

ble cynrychiola $\lambda_j(\omega)$ a $\boldsymbol{\phi}_j(\omega)$ y gwerthoedd-eigen a fectorau-eigen ar hap.

Brasamcanu'r datrysiadau-eigen ar hap: Mae brasamcanu gwerthoedd-eigen a fectorau-eigen ar hap hefyd yn medru lleihau'r amser cyfrifo. Oblegid ei effeithlonrwydd a'i rwyddineb, defnyddiwyd dull trefn un sy'n seiliedig ar y gyfres Taylor. Gellid mynegi'r $j$fed gwerth-eigen a'i fector-eigen cyfatebol fel a ganlyn

$$\lambda_j = \lambda_{j_0} + \sum_{k=1}^{M} \left(\frac{\partial\lambda_j}{\partial\xi_k}\right)\xi_k(\omega) \tag{11}$$

$$\text{ac} \quad \boldsymbol{\phi}_j = \boldsymbol{\phi}_{j_0} + \sum_{k=1}^{M} \left(\frac{\partial\boldsymbol{\phi}_j}{\partial\xi_k}\right)\xi_k(\omega) \tag{12}$$

ble mae $\xi_k(\omega)$ yn dynodi set o hapnewidynnau Gaussian sydd â chymedr sero ac amrywiant o un. Dynoda λ_{j_0} a $\boldsymbol{\phi}_{j_0}$ y $j$fed gwerth-eigen a fector-eigen penderfynedig. Mae deilliadau'r gwerthoedd-eigen a'r fectorau-eigen ar hap fel a ganlyn

$$\frac{\partial\lambda_j}{\partial\xi_k} = \boldsymbol{\phi}_j^T\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\xi_k}\boldsymbol{\phi}_j \tag{13}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\phi}_j}{\partial\xi_k} = \sum_{i=1\neq j}^{N} \alpha_{jki}\boldsymbol{\phi}_k \quad \text{ble} \quad \alpha_{jki} = \frac{\boldsymbol{\phi}_{k_0}^T\mathbf{A}_k\boldsymbol{\phi}_{j_0}}{\lambda_{j_0}-\lambda_{k_0}} \tag{14}$$

Lleihau'r cyfeiliornad drwy'r dull Gaerlerkin

Gellir defnyddio'r dull Galerkin er mwyn lleihau'r cyfeiliornad. Er mwyn cymhwyso'r dull yma, mae fector yr ymateb wedi cael ei addasu fel a ganlyn

$$\widetilde{\mathbf{u}}(\omega) = \sum_{j=1}^{M} \left(\frac{\boldsymbol{\phi}_j^T(\omega)\mathbf{f}}{\lambda_j(\omega)} + c_j\right)\boldsymbol{\phi}_j(\omega) \tag{15}$$

ble mae $c_j \in \mathbb{R}^M$ yn gysonion anhysbys sydd angen cael eu darganfod. Mae fector y cyfeiliornad ar gyfer un sylweddiad yn cymryd y ffurf

$$\widetilde{\epsilon}_\zeta(\omega) = \mathbf{A}(\omega)\widetilde{\mathbf{u}}(\omega) - \mathbf{f} \tag{16}$$

Gellir darganfod y cysonion c_j drwy ddefnyddio'r dull Galerkin. Gwnaed hyn drwy wneud y cyfeiliornad yn orthogonal i'r fectorau-eigen ar hap

$$<\boldsymbol{\phi}_k(\omega),\widetilde{\epsilon}_\zeta(\omega)> = 0 \quad \forall \quad k = 1,2,...t \tag{17}$$

ble $<\mathbf{u},\mathbf{v}> = \mathbb{E}\{\mathbf{u}^T\mathbf{v}\}$ yw'r lluosymiau mewnol. Drwy ddefnyddio'r diffiniad hwn, mae'n bosib canfod mynegiant ar gyfer y cysonion anhysbys c_j.

$$c_j = \frac{1}{\mathbb{E}\left\{\sum_{j=1}^{t} b_{jk}\right\}}\left[\mathbb{E}\left\{\boldsymbol{\phi}_k^T\mathbf{f}\right\} - \mathbb{E}\left\{\sum_{j=1}^{t}\frac{(b_{jk})(\boldsymbol{\phi}_k^T\mathbf{f})}{\lambda_j}\right\}\right] \quad \forall \quad j = 1,2,...t \quad \text{ac} \quad k = 1,2,...t \tag{18}$$

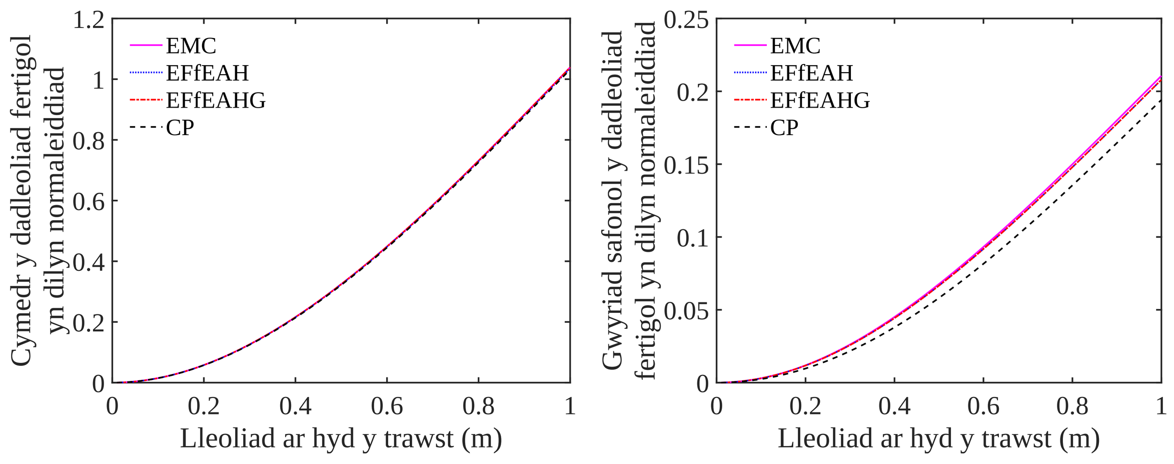
ble $b_{jk} = \boldsymbol{\phi}_k^T\mathbf{A}\boldsymbol{\phi}_j$. Gellir cyfrifo'r gwerthoedd disgwyliedig drwy ddefnyddio Efelychiadau Monte Carlo trefn-isel cyflym.

Cymhwysiad

Mae trawst cantilifer 1.00 m wedi ei arwahanu i 100 elfen, a chaiff grym penderfynedig o 1.00 N ei weithredu ar flaen rhydd y trawst. Ar gyfer yr achos penderfynedig, mae gan y trawst werth modwlws Young o $E = 69 \times 10^9$ Nm^{-2} (sy'n cyfateb â gwerth alwminiwm), ac ail foment arwynebedd (moment inertia) o $I = 6.75 \times 10^{-11}$ m^4. Gellir tybio fod anhyblygedd plygu'r trawst, EI, yn faes ar hap Gaussian sefydlog gyda chyfernod amrywiad o 0.2. Mae'r ehangiad KL (gweler Haflaiad (2)) o'r matrics anhyblygedd wedi cael ei flaendorri i gynnwys dau derm. Mae'r datrysiad ar gyfer dadleoliad fertigol y trawst wedi cael ei gyfrifo trwy bedwar dull gwahanol:

- Datrys Hafaliad (8) yn uniongyrchol drwy gymhwyso Efelychiadau Monte Carlo (EMC)
- Ehangiad Ffwythiannau Eigen Ar Hap (EFfEAH)
- Ehangiad Ffwythiannau Eigen Ar Hap gan gynnwys y dull Galerkin i leihau'r cyfeiliornad (EFfEAG)
- Caos Polynomial o drefn pedwar (CP)

Mae'r holl ddulliau wedi cael eu hefelychu 10,000 o weithiau. Ar gyfer y dulliau EFfEAH ac EFfEAHG, mae Hafaliadau (10) a (15) wedi cael eu blaendorri i gynnwys y 5 term cyntaf.



(a) Cymedr **(b)** Gwyriad safonol

Ffigwr 1: Cymedr a gwyriad safonol y dadleoliad fertigol yn dilyn normaleiddiad

Dull	EMC	EFfEAH	EFfEAHG	CP
Amser cyfrifo (eiliad)	9.59	0.86	4.07	1.07

Tabl 1: Yr amser a gymerwyd gan y cyfrifiadur i gyfrifo ymateb y trawst drwy ddefnyddio'r dulliau EMC, EFfEAH, EFfEAHG a CP

Dengys ffigyrau (1a) ac (1b) gymedr a gwyriad safonol y dadleoliad fertigol yn dilyn normaleiddiad ymhob nod ar y trawst. Mae Tabl 1 yn cynnwys yr amser a gymerwyd gan y cyfrifiadur i gwblhau'r holl ddulliau.

Casgliad

Cyflwynwyd ymateb hafaliadau stocastig arwahanol yn y ffurf $\mathbf{u}(\omega) = \sum_{j=1}^{t} a_j(\omega)\mathbf{g}_j(\omega)$. Cynrychiola $a_j(\omega)$ sgalarau ar hap a $\mathbf{g}_j(\omega)$ fectorau ar hap, ac mae'n bosib eu cyfrifo drwy ffwythiannau-eigen ar hap. Drwy frasamcanu a blaendorri, llwyddwyd i leihau'r amser y mae cyfrifiadur yn ei gymryd i weithredu'r dull ffwythiannau eigen ar hap. Cymhwyswyd dull Galerkin er mwyn mynd i'r afael â'r cyfeiliornad a gyflwynwyd gan y brasamcanu a'r blaendorri. Mewn cymhariaeth ag Efelychiadau Monte Carlo uniongyrchol, mae'r dull arfaethedig yn darparu canlyniadau manwl gywir mewn amser cyfrifo cynt. Yn y dyfodol, rydym yn bwriadu cymhwyso'r dull ar strwythurau dynamig.

Cydnabyddiaethau: Dymuna'r awduron ddiolch yn fawr i'r Rhwydwaith Ymchwil Genedlaethol am eu cymorth ar gyfer y prosiect hwn